PREGUNTA N°01. (1P)

Un sistema hipotético de punto flotante basado en el estándar IEEE-754 maneja un total de 7 bits, de los cuales 3 están destinados a la mantisa. Se pide determinar:

a) El mayor número positivo normalizado, mostrando sus 7 bits y su correspondiente equivalente decimal.
b) Muestre el almacenamiento de 7 bits del número 16.5.

Solución:

a)

s	E1	E2	E3	M1	M2	M3

K=3 bits del exponente

Bias=$2^{(K-1)}$-1=3

X=$(-1)^{(S)}$*1.M1M2M3*$2^{E1E2E2\text{-bias}}$

0	1	1	0	1	1	1

Realmax=$(-1)^{(0)}$*1.111*2^{110-3}

Realmax= 15

b)

Como el número 16.5 exceder el **realmax** genera un desbordamiento de rango OVERFLOW y se almacena como Inf.

0	1	1	1	0	0	0

PREGUNTA N°02. (1P)

a) Dada la Matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ y el vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine el valor de δ, para que v sea un auto vector de la matriz A.

b) ¿Qué información proporciona la tasa de convergencia en el método de la potencia directa para este caso? Explique brevemente su significado.

Solución:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \delta \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \delta = 4$$

b)

La tasa de convergencia indica qué tan rápido el método de la potencia aproxima el auto vector dominante (y su autovalor). Está gobernada por el cociente:
$|\boldsymbol{\lambda}_1/\boldsymbol{\lambda}_2| \leq 0.25$, por lo que al aplicar el método de la potencia, este convergerá rápido.

PREGUNTA N°03. (1P)

Complete los 5 espacios en blanco en el siguiente código MATLAB para ajustar el modelo

$$y = \frac{a\sqrt{x}}{1 + b\sqrt{x}}$$

a los datos proporcionados, utilizando una linealización adecuada y el método de mínimos cuadrados.

```
clc; clear; close all;
% Datos Experimentales
x = [1 4 9];
y = [0.5 0.8 0.9];
% 1. Linealización de variables
% Defina el vector Y ya está dado como Y = 1./y.
% Defina el vector X necesario para la forma linealizada Y = mX + k.
Y = 1./y;
X = ____________________;  % (1)
% 2. Regresión Lineal
% Obtenga el vector de coeficientes p (donde p(1) es pendiente y p(2) es intercepto)
% ajustando un polinomio de primer orden a los datos transformados.
c1 = ____________________; % (2)
% 3. Recuperación de Parámetros
% Calcule el valor del parámetro 'a' del modelo original basándose en
% la relación teórica con la pendiente obtenida en 'c1'.
a = ____________________; % (3)
% Cálculo del parámetro 'b' (se asume conocido el intercepto para este paso)
b = c1(2) * a;
% 4. Evaluación del modelo linealizado
% Genere el vector de valores aproximados (Yaprox) evaluando el polinomio
% obtenido sobre los datos transformados X.
Yaprox = ____________________; % (4)
% 5. Bondad de ajuste
% Calcule el coeficiente de determinación R2 utilizando la relación de varianzas
% entre los valores aproximados y los valores observados transformados.
R2 = ____________________; % (5)
% Despliegue de resultados
disp(['R2: ', num2str(R2)]), disp(['a: ', num2str(a)])
```

Solución:

```
clc; clear; close all;

% Datos Experimentales
x = [1 4 9];        % Representa H
y = [0.5 0.8 0.9];  % Representa B

% 1. Linealización de variables
% Se linealiza 1/y = (1/a)*(1/sqrt(x)) + (b/a)
Y = 1./y;
X = 1./sqrt(x);             % (1)

% 2. Regresión Lineal
% Ajuste de polinomio de grado 1 (mX + k)
c1 = polyfit(X, Y, 1);      % (2)

% 3. Recuperación de Parámetros
% La pendiente m = c1(1) equivale a 1/a, por lo tanto a = 1/m
a = 1/c1(1);                % (3)

% Cálculo del parámetro 'b' (intercepto k = b/a -> b = k*a)
b = c1(2) * a;

% 4. Evaluación del modelo linealizado
% Se evalúa el polinomio c1 en los puntos transformados X
Yaprox = polyval(c1, X);    % (4)

% 5. Bondad de ajuste
% Cálculo de R2 usando varianzas (según criterio del curso)
R2 = var(Yaprox)/var(Y);    % (5)

% Despliegue de resultados
disp(['R2: ', num2str(R2)])
disp(['a: ', num2str(a)])
disp(['b: ', num2str(b)])
```

resolver la EDO.

$$-y'' + y = x, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Al aplicar el método de las diferencias se debe transformar al siguiente sistema lineal:

$$Ay = b$$

$$b = \left(ih^3\right)_{i=1}^{n-1} \qquad A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n-1} \qquad a_{ij} = \begin{cases} h^2 + 2, & i = j \\ -1, & j = i-1, j = i+1 \\ 0, & |j-i| > 1 \end{cases}$$

Complete el código de MATLAB:

```
a=0; b=1; h=1/4;
n=(b-a)/h;
x=a:h:b;
%Sólo usar el comando diag y ones, no usar for … end

A=……………………………………………………………………………………………………………………………………………;

B=……………………………………………………………………………………………………………………………………………;

y=[0;A\B;0]
```

Solución:

```
A=diag(-(2-h^2)*ones(n-1,1))+diag(ones(n-2,1),-1)+diag(ones(n-
2,1),+1);
B=-[1:n-1]'*h^3
```

PROBLEMA 1 (4P)

La solución de sistemas de ecuaciones lineales es fundamental en el análisis de circuitos DC y AC en estado estacionario. A partir del circuito de la Figura 1 (tres mallas I_1, I_2, I_3 con resistencias R_1, R_2, R_3, respectivamente), se requiere determinar las corrientes de malla.

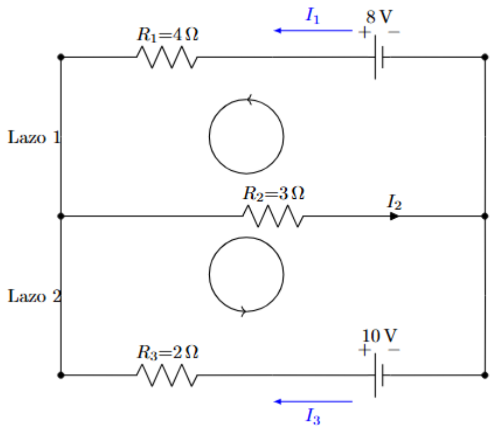


Figura 1 Circuito Eléctrico

Condiciones del problema:

$R_1 = 4\ \Omega, R_2 = 3\ \Omega$ y $R_3 = 2\ \Omega$,

con polaridades y sentidos de malla antihorario como en el diagrama.

a) (1P) Formule el sistema lineal $A * I = V$ usando la Ley de Voltajes de Kirchhoff aplicado al **circuito eléctrico**.

b) (1.5P) Analice la convergencia del método de Gauss-Seidel utilizando el criterio del radio espectral.

c) (0.5P) Explique por qué el reordenamiento de las ecuaciones no ayuda a establecer la convergencia del método de Gauss–Seidel.

d) (1P) Realice 02 iteraciones utilizando el método de Gauss-Seidel considerando un punto semilla $I^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

a) Formulación del sistema lineal $A\cdot I = V$ (KVL/KCL)

$$4I_1 + 3I_2 = 8$$
$$3I_2 + 2I_3 = 10$$
$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

b) Convergencia de Gauss–Seidel (criterio del radio espectral)

Para Gauss–Seidel se usa la descomposición $A = (D-L) - U$, y la matriz iterativa es:

$T_{GS} = (D-L)^{-1} U$.

Calculando con la A anterior, los autovalores de T_{GS} son aproximadamente:

$\lambda = 0, \ -0.3333 \pm 0.6236\, i$

Por tanto, el radio espectral es:

$\rho(T_{GS}) = \max|\lambda| = 0.7071 < 1 \Rightarrow$ Gauss–Seidel converge para este sistema.

c) ¿Por qué reordenar ecuaciones no ayuda a "garantizar" convergencia?

Si no se logra dominancia diagonal estricta al permutar las filas, no asegura convergencia. La clave es evaluar **$\rho(T_{GS})$**.

d) Dos iteraciones de Gauss–Seidel con $I^{(0)} = [1,1,1]^T$

Usando el orden (I_1, I_2, I_3) y despejando cada ecuación por su variable diagonal:

$I_1^{(k+1)} = (8 - 3 I_2^{(k)}) / 4$

$I_2^{(k+1)} = (10 - 2 I_3^{(k)}) / 3$

$I_3^{(k+1)} = -I_1^{(k+1)} + I_2^{(k+1)}$ (de $-I_1+I_2-I_3=0$)

Iteración 1 (desde $I^{(0)}=[1,1,1]^T$):

$I_1^{(1)} = (8 - 3\cdot1)/4 = 1.25$

$I_2^{(1)} = (10 - 2\cdot1)/3 = 8/3 = 2.6666667$

$I_3^{(1)} = -1.25 + 2.6666667 = 1.4166667$

$\Rightarrow I^{(1)} = [1.25, 2.6666667, 1.4166667]^T$

Iteración 2:

$I_1^{(2)} = (8 - 3\cdot2.6666667)/4 = 0$

$I_2^{(2)} = (10 - 2\cdot1.4166667)/3 = 2.3888889$

$I_3^{(2)} = -0 + 2.3888889 = 2.3888889$

$\Rightarrow I^{(2)} = [0, 2.3888889, 2.3888889]^T$

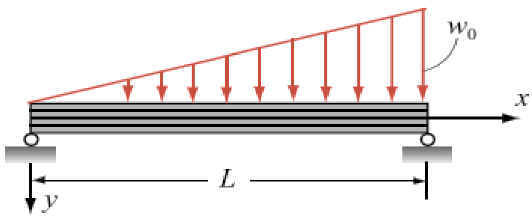
Solución exacta (referencia)

Resolviendo $A\cdot I=V$ directamente:

$I_1 = 0.3846154$ A, $I_2 = 2.1538462$ A, $I_3 = 1.7692308$ A

PROBLEMA 2 (4P)

Una viga tipo **I** simplemente apoyada está sometida a una **carga distribuida**, como se muestra en la figura. La **deflexión** $\boldsymbol{y}$ de la línea central de la viga como función de la posición x está dada por la ecuación:



$$y = \frac{w_0\, x}{360\, L\, E\, I}\left(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4\right)$$

donde:

- L=4 m es la longitud.
- E=70 GPa es el módulo de elasticidad.
- I=52.9×10^{-6} m^4 es el momento de inercia.
- w_0=20 kN/m.

Determine la **posición** $\boldsymbol{x}$ donde la deflexión de la viga es **máxima** y determine la **deflexión en este punto** (La deflexión máxima ocurre en el punto donde $\frac{dy}{dx} = 0$).

a) (1.5 P) Determine la **posición** $\boldsymbol{x}$ donde la deflexión de la viga es **máxima,** resolver por el método de **Newton-Raphson.** Use 0.001 como tolerancia para el error y punto inicial x=2.

b) (1.5 P) Determine la **posición** $\boldsymbol{x}$ donde la deflexión de la viga es **máxima, r**esolver por el método de la **Secante**. Use **0.0001** como tolerancia para el error, **1.5** para $\boldsymbol{x_a}$ y **2.5** para $\boldsymbol{x_b}$.

c) (1.0 P) Determine el valor de la deflexión máxima. Comente su respuesta.

Solución:

La deflexión máxima ocurre cuando $\frac{dy}{dx} = 0$

$$y(x) = \frac{w_0 x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{360LEI}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$
$$f(x) = 7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4 = 0$$
$$f(x) = 1792 - 480x^2 + 15x^4 = 0$$

a) Newton-Raphson

Función y derivada

$$f(x) = 1792 - 480x^2 + 15x^4$$
$$f'(x) = -960x + 60x^3$$

Formula iterativa: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1 = 2$ Error= 10^{-4}

Iter	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	Error
1	2	112	-1440	2.07777778	0.077777778
2	2.07777778	-0.668916095	-1459.460658	2.07731850	0.000459275
3	2.07731850	-0.000019303	-1459.376573	2.07731849	1.32254E-08

b) Método de la Secante

Parámetros pedidos:

- Error= 10^{-4}
- $x_a = 1.5$
- $x_b = 2.5$

Sea $f(x)$ la función de la cual se desea hallar la raíz, dados los valores iniciales x_{i-1} y x_i, la fórmula iterativa es:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Iter	x_a	x_b	$f(x_i)$	$f(x_{i-1})$	x_{nuevo}	Error
1	1.5	2.5	-622.0625	787.9375	2.05882092	0.44117908
2	2.5	2.05882092	26.9072855	-622.0625	2.07711289	0.01829196
3	2.05882092	2.07711289	0.29943335	26.9072855	2.07731874	0.00020585
4	2.07711289	2.07731874	-0.00035775	0.29943335	2.07731849	2.4565E-07

c) Deflexión máxima

Evaluamos $y(x)$ en x = 2.07731849 m

$$y_{max} = \frac{20\ x\ 10^{3}(2.07731849)}{360(4)\left(70x10^{9}\right)\left(52.9x10^{-6}\right)}\left(7(4)^{4} - 10(4)(2.07731849)^{2} + 3(2.07731849)^{4}\right)$$

$$y_{max} = 9.018\ mm$$

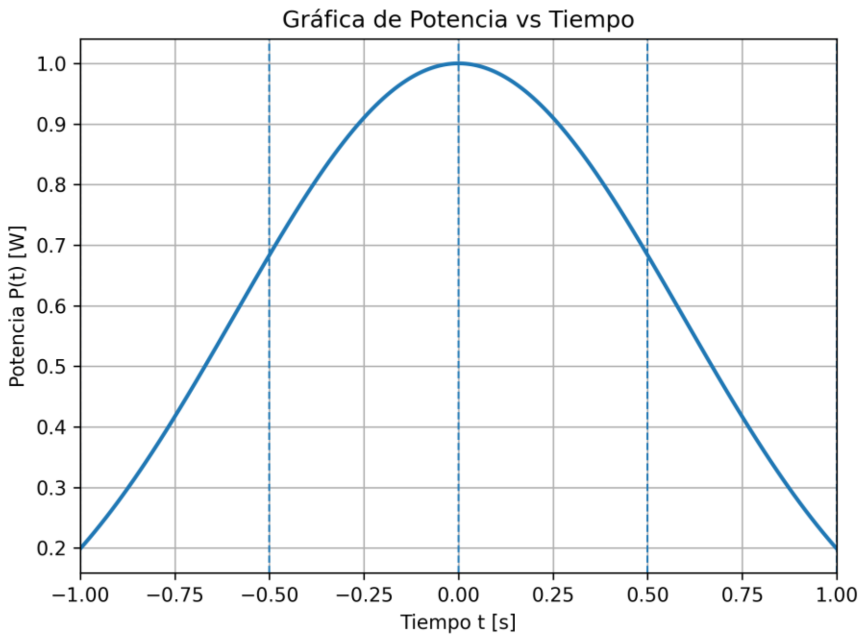
PROBLEMA3 (4P)
Durante una fase de operación controlada, la potencia instantánea consumida por un actuador se modela mediante la función:

$$\boldsymbol{P(t) = e^{-t^2} cos(t)},$$

definida en el intervalo de tiempo t ∈ [−1, 1] segundos.
La energía total consumida en dicho intervalo está dada por:
Gráfica Potencia vs Tiempo (para el inciso a):

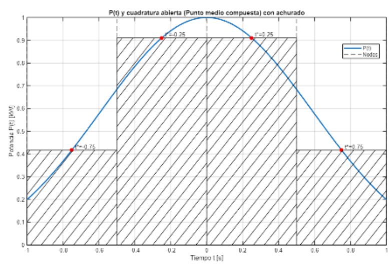
$$\boldsymbol{E = \int_{-1}^{1} P(t)dt}$$

a) **(1.5 P)** En la gráfica Potencia vs Tiempo mostrada, represente gráficamente y mediante achurado el área que corresponde a la energía aproximada utilizando una cuadratura abierta (regla del punto medio compuesta) con m= 4 rectángulos. **<u>Utilice el gráfico</u>** para aproximar el área solicitada.



Solución
a)

A partir del gráfico E≈ $0.91 + 0.41 = 1.32$



$$h = 0.5, t_i^* = \{-0.75, -0.25, 0.25, 0.75\}$$

$$E \approx h \sum_{i=1}^{4} P(t_i^*) = 0.5[P(-0.75) + P(-0.25) + P(0.25) + P(0.75)]$$

Como $P(t) = e^{-t^2} \cos t$ es par, $P(-t) = P(t)$, entonces:

$$E \approx 0.5[2P(0.75) + 2P(0.25)] = P(0.75) + P(0.25) = 1.3271127362$$

b) **(1.0 P)** Para asegurar que la estimación de la energía sea suficientemente precisa y evitar una descarga prematura del actuador se requiere que el error de cálculo sea menor que $\boldsymbol{\varepsilon < 0.2}$. Utilizando la **Regla del Trapecio Compuesta,** determine el número mínimo de subintervalos $\boldsymbol{n}$ necesarios para cumplir con dicha tolerancia en la aproximación de la energía total **E**.

Sugerencia: Para el análisis de error, utilice las siguientes cotas de las derivadas del modelo de potencia: $\boldsymbol{|P'(t)| \leq 1, |P''(t)| \leq 3, \left|P^{(3)}(t)\right| \leq 7, \left|P^{(4)}(t)\right| \leq 25.}$

Cota del error - Regla del Trapecio Compuesta

$$|E - E_h| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M = \frac{2}{12} h^2 (3) = \frac{1}{2} h^2$$

Imposición de la tolerancia:

$$\frac{1}{2} h^2 \leq 0.2 \ \Rightarrow n \geq 3.16 \qquad\qquad n_{\min} = 4$$

$$t_i = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$$

Regla del trapecio compuesta:

$$\begin{aligned} E_T &\approx \frac{0.5}{2}[0.198766 + 2(0.683461) + 2(1) + 2(0.683461) + 0.198766] \\ &= 0.25(5.130914) \\ &\approx 1.2827. \end{aligned}$$

Nota: Para el análisis de error, utilice las siguientes cotas de las derivadas del modelo de potencia: $\boldsymbol{|P'(t)| \leq 1, |P''(t)| \leq 3, \left|P^{(3)}(t)\right| \leq 7, \left|P^{(4)}(t)\right| \leq 25.}$

c) **(1.0P)** Calcule una aproximación de la integral **E** empleando una cuadratura de Gauss–Legendre de 2 puntos.

) los nodos y pesos de GL son: $\xi_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, w_{1,2} = 1$

la aproximación es:

$$E_{GL2} \approx \sum_{i=1}^{2} w_i P(\xi_i) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Como $P(t)$ es par $(P(-t) = P(t))$:

$$E_{GL2} \approx 2e^{-1/3}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577350269$$

$$E_{GL2} \approx 2e^{-1/3}\cos(0.577350269) \approx 1.20.$$

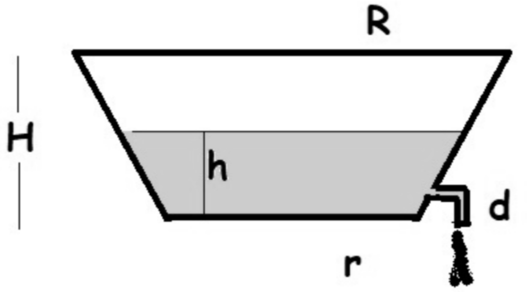
d) **(0.5P)** Tomando como referencia el **valor: E_ref ≈ 1.29584**, calcule el error relativo asociado a cada uno de los métodos utilizados en los incisos a), b) y c), compare y explique sus resultados.

Método	Aproximación	Error relativo
Punto medio $n = 4$	1.3271	2.41%
Trapecio $n = 4$	1.2827	1.01%
Gauss-Legendre 2 pts	1.2008	7.34%

El mejor método es Trapecio cerrado con 4 intervalos para este caso.

PROBLEMA4 (4P)

Se desea determinar la ecuación diferencial que describe la variación de nivel de fluido en un tanque de forma de cono truncado, de radio superior $R = 0.5\,m$, radio inferior $r = 0.3\,m$, siendo $r < R$ y altura $H = 0.4\,m$. Considere que el tanque se encuentra inicialmente lleno y tiene un orificio de salida en parte inferior de diámetro $d = 0.05\ m$, $g = 9.81\,m/s^2$.



a) **(1P)** Demostrar que el proceso es gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2\sqrt{2gh}}{4\left(r + \frac{R-r}{H}h\right)^2}$$

Tener en cuenta que la velocidad con que sale el fluido del orificio obedece a la Ley de Torricelli:

$$vs = \sqrt{2gh}$$

b) **(2P)** Determine el tiempo de vaciado del tanque, aplicando Euler, con paso Δt=6 segundos.

c) **(1P)** Estime valor exacto por integración, el error relativo porcentual y comente sus resultados.

Solución:

a)

Razón de cambio del volumen en tanque=-Caudal de salida por el orificio

Área transversal a una distancia h: $A(h) = \pi\left(r + \frac{R-r}{H}h\right)^2$

$$\frac{dh}{dt}A(h) = -\pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2gh}$$

Reemplazando:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2\sqrt{2gh}}{4\left(r + \frac{R-r}{H}h\right)^2} \qquad h(0) = H$$

b) Algoritmo de Euler:

$t_0=0$

$h_0=0.4$ m

$\Delta t=6$

$t_{i+1}=t_i+\Delta t$

$$h_{i+1} = h_i + \Delta t\left(-\frac{d^2\sqrt{2gh_i}}{4\left(r + \frac{R-r}{H}h_i\right)^2}\right)$$

t (seg)	H (m)
0	0.4
6	0.3580
12	0.3147
18	0.2701
24	0.2245
30	0.1782
36	0.1319
42	0.0868
48	0.0453
54	0.0114
60	-0.0076

El tanque queda vaciado aproximadamente entre 54 y 60 seg., por interpolación lineal obtenemos 57.5978 segundos

c)

Integrando t entre 0 y $t_{vaciado}$, y h entre H y 0, obtenemos:

$t_{vaciado}$= 63.0536 segundos (error=8.65 %)

Se podría reducir el error tomando Euler con un paso más pequeño, digamos 0.1 segundos o tomar un método más preciso, como Runge-Kutta 2 o 4.